# Серия 36. Разнобой.

**1.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке $O$. На сторонах $BC$ и $CD$ нашлись точки $P$ и $Q$ такие, что $PA \perp AD$, $QA \perp AB$. Докажите, что точки $P$, $O$, $Q$ лежат на одной прямой.

**2.** Решите в целых числах

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

**3.** Дано натуральное число $n > 1$. Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники $1 \times 3$ или количество способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на клетчатые прямоугольники $1 \times 2$?

**4.** Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ удовлетворяют условиям:
a)$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}$;
b)$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$.
Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1^{12} + x_2^{12} + \ldots + x_{1997}^{12}.$$

**5.** Натуральные числа $n$ и $k$ таковы, что $1 + 2 + \ldots + n$ делится на $2^k$. Докажите, что для всех нечётных $l > 1$ число $1^l + 2^l + \ldots + n^l$ делится на $2^{2k}$.

**6.** На бесконечном белом клетчатом листе бумаги $n$ клеток покрасили в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка $K$ перекрашивается в цвет, в который покрашено хотя бы две из таких трёх клеток: сама клетка $K$, соседняя сверху и соседняя слева. Докажите, что не позднее, чем через $n$ минут все клетки станут белыми.