Серия 35.

1. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что $2^n - 1$ делится на $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда n делится на $m(2^m - 1)$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $3^k = x^n + 1$.

Пусть p — простое число. Обозначим $ord_p(n)$ — степень вхождения числа p в разложение числа n на простые множители.

3. Пусть $a-1$ делится на p, а l не делится на p. Докажите, что $ord_p(a-1) = ord_p(a^l-1)$.

4. Пусть $a - 1$ делится на p, а $p > 2$ (и, по традиции, простое).
Докажите, что $ord_p(a^p - 1) = 1 + ord_p(a - 1)$.

5. а) Докажите *лемму об уточнении показателя:* если p — нечётное простое число и $a - 1$ делится на p, то $ord_p(a^n - 1) = ord_p(n) + ord_p(a - 1)$.
б) Сформулируйте и докажите лемму об уточнении показателя, если $p = 2$.

6. Для какого наименьшего n число $2017^n - 1$ делится на 2^{2017}?

7. На какую наибольшую степень числа 2017 делится число $2016^{2017^{2018}} + 2018^{2017^{2016}}$?

8. Даны различные простые $p_1, p_2, \ldots p_n$, большие 3. Докажите, что у числа $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ не менее 4^n натуральных делителей.

9. Построим последовательность $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2^{a_n} + 1$. Докажите, что у какого-то члена этой последовательности не меньше миллиона различных простых делителей.