Серия 34.

1. Сумма положительных a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ca.$$

2. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на другое, и заменить их на их НОД и НОК.

Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз и всегда закончим одним и тем же множеством чисел.

3. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

4. Натуральные числа n и k таковы, что $(k+1)^3 - k^3 = n^2$. Докажите, что $2n-1$ — точный квадрат.

5. а) Дано простое число p. Вася написал на доске $2p-1$ целое число. После чего Петя выписал все возможные наборы по p чисел (всего C_{2p-1}^{p} наборов), сложил числа в каждом наборе, возвёл сумму набора в степень $p-1$ и сложил все C_{2p-1}^{p} степеней. Докажите, что результат делится на p.
б) Докажите **теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива**: из любых $2p-1$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p.

6. Let M, N and P be midpoints of sides BC, AC and AB, respectively, and let O be circumcenter of acute-angled triangle ABC. Circumcircles of triangles BOC and MNP intersect at two different points X and Y inside of triangle ABC. Prove that

$$\angle BAX = \angle CAY.$$

7. Неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 60°$, вписан в окружность Ω. На биссектрисе угла A выбрана точка A', а на биссектрисе угла B — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $B'A \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.