

Серия 33.

1. In an acute-angled triangle ABC , the altitudes from A, B, C meet the sides of ABC at A_1, B_1, C_1 , and meet the circumcircle of ABC at A_2, B_2, C_2 , respectively. Line A_1C_1 intersects the circumcircles of triangles AC_1C_2 and CA_1A_2 at points P and Q ($Q \neq A_1, P \neq C_1$). Prove that the circle PQB_1 touches the line AC .

2. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC , выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC .

3. Петя выбрал 100 различных натуральных чисел выписал на доску все 4950 их парных сумм. Сколько из них могли оказаться степенью тройки?

4. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$.

Докажите, что

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geq 6xyz.$$

5. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B . Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB пересекают второй график в точках C и D . Докажите, что CD параллельно оси абсцисс.

6. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда мы добавили спичку. Процесс останавливается, когда больше нельзя сделать ни одного хода. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.

7. В некоторых клетках клетчатой полосы $1 \times n$ стоят фишки. В первой клетке (самой левой) x_1 штук, во второй — x_2, \dots , в n -й клетке — x_n . Двое игроков играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок выбирает некоторое подмножество фишек, а второй либо передвигает все фишки этого подмножества на 1 клетку влево, а остальные убирает с доски, либо делает то же самое с дополнением выбранного подмножества. Первый хочет, чтобы какая-то фишка оказалась в самой первой клетке, а второй хочет ему помешать. При каких x_1, x_2, \dots, x_n у первого игрока есть выигрышная стратегия?