Серия 32. Про diamond-лемму и не только.

1. В алфавите имеется n букв и соответствующим им n антибукв, где n — натуральное. Изначально выписано некоторое слово этого алфавита. Каждую секунду из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и ее антибуква (не важно, кто из них слева, а кто справа) до тех пор, пока не остается несократимое слово. Докажите, что несократимое слово, которое получится в результате, не зависит от хода процесса.

2. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1. В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

3. Diamond lemma, она же лемма Ньюмана. Дан ориентированный граф с
(a) конечным (b) бесконечным
множеством вершин. Будем называть вершину v графа потомком вершины u графа, если существует путь из u в v. Если есть стрелка из u в v, то v назовем ребенком вершины u. Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины графа у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины графа существует единственный потомок исходящей степени 0.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ac} + \frac{c+3}{3c+ab} \geqslant 3$$

5. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ с попарно различными сторонами наружу построены правильные треугольники с центрами S_1, S_2, S_3, S_4 (центры перечислены в порядке обхода сторон четырехугольника). Докажите, что если диагонали $ABCD$ равны, то S_1S_3 перпендикулярно S_2S_4.

6. An acute-angled ABC ($AB < AC$) is inscribed into a circle ω. Let M be the centroid of ABC, and let AH be an altitude of this triangle. A ray MH meets ω at A'. Prove that the circumcircle of the triangle $A'HB$ is tangent to AB.

7. Пусть N — количество натуральных решений уравнения $a^2+b^3 = c^2+d^3$, где a, b, c, d меньше 10^9, а M — количество решений уравнения $a^2+b^3 = c^2+d^3+1$, где a, b, c, d меньше 10^9. Докажите, что $N \geqslant M$.

8. У 7 гирек суммарный вес равен 1. Каково наименьшее число наборов этих гирек с суммарным весом не менее $\frac{2}{3}$?