

Серия 31. Немного новых идей.

1. Решите в целых числах

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

2. В неравностороннем остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC . Прямая BO пересекает сторону AC в точке P , а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

3. В некоторых клетках бесконечной полосы лежат камни (может быть более одного камня в клетке, всего камней конечное число). Разрешается убрать два камня, лежащие в одной клетке, и положить один камень в клетку правее. Докажите, что конечная расстановка камней (то есть расстановка, в которой такую операцию нельзя будет сделать) не зависит от порядка действий и зависит только от первоначальной расстановки.

4. То же самое, но действие такое: убирается по камню с клеток i и $i + 1$ и кладётся камень в клетку $i + 2$. Докажите, что все конечные расстановки, в которых в каждой клетке не более одного камня и нет двух занятых соседних, получаемые из заданной начальной, одинаковые.

5. Вершины связного графа на n вершинах покрашены в чёрный и белый, оба цвета присутствуют. Докажи, пожалуйста, что можно в вершинах расставить числа так, чтобы каждое белое число было больше среднего арифметического соседей, а каждое чёрное меньше.

6. Two circles meet at points A and B . A line through B intersects the first circle again at K and the second circle at M . A line parallel to AM is tangent to the first circle at Q . The line AQ intersects the second circle again at R .

(a) Prove that the tangent to the second circle at R is parallel to AK . (b) Prove that these two tangents meet on KM .

7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2 + c^2 + a^2} \leq \frac{3}{4}$$

8. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A' , B' и C' . Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что треугольник ABC — правильный?