Серия 30. Мы не будем рисовать вам название темы.

1. Расстояние между деревнями Петрово и Васино равна 60 км. В 11:00 из Петрово в Васино выехал Вася на велосипеде. После этого (неизвестно, во сколько) из Васино в Петрово выехал Петя. Через четыре часа после выезда Пети Вася приехал в Васино. А Петя приехал в Петино в 19:00. На каком расстоянии от Васино встретились Вася и Петя?

2. По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону — телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом ещё через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода, и потом ещё через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 часов, а пешеход встретил машину в 11 часов. Когда пешеход встретил телегу?

3. Существуют ли такие четыре квадратных трёхчлена, что для любого способа их пронумеровать f_1, f_2, f_3, f_4 найдётся такое действительное x, что

$$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < f_4(x)?$$

4. Числа $a, b, c \in [0; 1]$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a + 1.$$

Про кубическую параболу.

5. Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек $\dots$, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, $\dots$ так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a + b + c = 2015$.

6. Сумма трёх действительных чисел и сумма их квадратов равна 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма их кубов?

На английском.

7. In a acute triangle $\triangle ABC$, denote D, E as the foot of the perpendicular from B to AC and C to AB. Denote the reflection of E with respect to AC, BC as S, T. The circumcircle of $\triangle CST$ hits AC at point $X (\neq C)$. Denote the circumcenter of $\triangle CST$ as O. Prove that $XO \perp DE$.

8. There are several contestants at a math olympiad. We say that two contestants A and B are indirect friends if there are contestants $C_1, C_2, ..., C_n$ such that A and C_1 are friends, C_1 and C_2 are friends, C_2 and C_3 are friends, ..., C_n and B are friends. In particular, if A and B are friends themselves, they are indirect friends as well. Some of the contestants were friends before the olympiad. During the olympiad, some contestants make new friends, so that after the olympiad every contestant has at least one friend among the other contestants. We say that a contestant is special if, after the olympiad, he has exactly twice as indirect friends as he had before the olympiad. Prove that the number of special contestants is less or equal than $\frac{2}{3}$ of the total number of contestants.