Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 2. Теорема Виета. Группа 9-1.

1. Один из корней уравнения $x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0$ равен 3. Решите уравнение.

2. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

3. Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

4. Известно, что $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$, $a^3 + b^3 + c^4 = 7$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

5. Найдите все тройки x, y, z положительных действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4;$$

$$xy + yz + zx = 2(x + y + z).$$

6. Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами $ax^3 + bx^2 + cx + d$ такой, что ad нечётное число, bc — чётное. Докажите, что не все корни многочлена рациональны.

7. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$. Известно, что $x_1 \cdot x_2 = -32$. Найдите k.

8. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?