Серия 29. Разнобой.

1. Две окружности Ω_1 и Ω_2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω_1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω_2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω_1 делит отрезок BC пополам.

2. Точки A и P лежат вне прямой ℓ. Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PBC, имеют общую точку, отличную от P.

3(теорема Турана). В графе на v вершинах, не содержащем полного подграфа на $n \geq 3$ вершинах, не может быть больше, чем $\frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$ ребер, где r — остаток от деления v на $n-1$.
Указание: посмотрите на задачу 2 из прошлого разнобоя.

4. В коробке 160 батареек, среди которых 80 работающих. За одну попытку можно вставить две батарейки в фонарик и попробовать его включить. Если обе батарейки работающие, фонарик загорится. За какое наименьшее количество попыток гарантированно получится зажечь фонарик?

5. Пусть $d(n)$ — число делителей натурального числа n. Найдите все возрастающие последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такие, что $d(a_i + a_j) = d(i + j)$ при всех натуральных i и j.

6. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X —треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

7. Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100×100, в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей и множество полей не зависит от расположения других фигур (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру A передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.