Серия 26. Разнобой.

1. Let Γ_1 and Γ_2 be two non-overlapping circles. A, C are on Γ_1 and B, D are on Γ_2 such that AB is an external common tangent to the two circles, and CD is an internal common tangent to the two circles. AC and BD meet at E. F is a point on Γ_1, the tangent line to Γ_1 at F meets the perpendicular bisector of EF at M. MG is a line tangent to Γ_2 at G. Prove that $MF = MG$.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что $P(a)$ целое тогда и только тогда, когда $Q(a)$ целое. Докажите, что сумма или разность многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — константа.

4. Различные натуральные числа a, b и c меньшие 2017 таковы, что их кубы дают одинаковые остатки при делении на 2017. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$.

5. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что $f(f(x))$ имеет 3 корня, а $f(f(f(x)))$ имеет 7 корней?

6. По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.

7. По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 её соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4.