Серия 25. Фибоначчи снова.

Если кто не знает. Назовём *числами Фибоначчи* следующую последовательность. $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Может ли сумма семи последовательных чисел Фибоначчи быть числом Фибоначчи?

2. а) Докажите, что $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$.
б) Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

3. Докажите, что $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

4. Докажите, что всякое натуральное число единственным образом представлется в виде суммы несоседних чисел Фибоначчи с индексами больше 1.

5. Назовём *последовательностью типа Фибоначчи* последовательность, у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Можно ли разбить натуральный ряд на последовательности типа Фибоначчи? (Каждое число должно войти в одну последовательность, последовательностей может быть бесконечно много.)

6. Дана последовательность Фибоначчи F_n $(F_0 = 0, F_1 = 1)$. Докажите, что существует такое натуральное n, имеющее не менее 100 различных простых делителей, что F_n делится на n.

Кружок в "Хамовниках". 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 25. Фибоначчи снова.

Если кто не знает. Назовём *числами Фибоначчи* следующую последовательность. $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Может ли сумма семи последовательных чисел Фибоначчи быть числом Фибоначчи?

2. а) Докажите, что $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$.
б) Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

3. Докажите, что $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

4. Докажите, что всякое натуральное число единственным образом представлется в виде суммы несоседних чисел Фибоначчи с индексами больше 1.

5. Назовём *последовательностью типа Фибоначчи* последовательность, у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Можно ли разбить натуральный ряд на последовательности типа Фибоначчи? (Каждое число должно войти в одну последовательность, последовательностей может быть бесконечно много.)

6. Дана последовательность Фибоначчи F_n $(F_0 = 0, F_1 = 1)$. Докажите, что существует такое натуральное n, имеющее не менее 100 различных простых делителей, что F_n делится на n.