Серия 24. Ориентированные графы

1 а). Докажите, что в сильно связном ориентированном графе на n вершинах можно удалить некоторые рёбра и оставить не более $2n-2$ ребра так, чтобы он остался сильно связным.

b). Если при этом между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то можно оставить не более $2n-3$ ребра

с). Приведите примеры для предыдущих пунктов, когда меньше оставить нельзя.

2. В едином и неделимом государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, и только президент имеет право ездить в любом направлении. После многократных поездок по стране президент заметил, что если выехать из любого города, проехать по любому количеству дорог и вернуться обратно, то разность количества дорог, которые он проехал по правилам и тех дорог, которые он проехал не по правилам, всегда делится на три. Докажите, что страну можно разделить на три независимые республики так, что из первой республики дороги будут вести только во вторую, из второй — только в третью и из третьей — только в первую.

3. Докажите, что если в ориентированном графе нет ориентированных циклов, а длина наибольшего ориентированного пути равна n, то вершины графа можно разбить на n групп так, чтобы внутри каждой группы не было стрелок.

4. Пусть G — сильно связный ориентированный граф, в котором входящая степень каждой вершины равна исходящей степени и не меньше 2. Докажите, что из него можно удалить рёбра некоторого ориентированного цикла так, чтобы сильная связность сохранилась.

5. Пусть G — сильно связный ориентированный граф на n вершинах. Всегда ли можно покрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы из любой вершины, кроме, может быть, одной, выходила хотя бы одна стрелка в вершину противоположного цвета?

6. Пусть G —– сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа G в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.

7. В графе есть рёбра веса 1 и рёбра веса 2. Известно, что для каждой вершины сумма весов ребер с концом в этой вершине нечетна. Докажите, что можно ориентировать рёбра графа так, чтобы для каждой вершины сумма весов входящих в нее ребер отличалась от суммы весов выходящих из нее ребер не более, чем на 1.