Серия 23. Подготовка к региону + немного тригонометрии.

1. В треугольнике ABC проведены высота BH, медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 (A_1 лежит на стороне BC, C_1 – на стороне AB). Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M, а прямые C_1B_1 и A_1H – в точке N. Докажите, что прямые MN и BH параллельны.

2. В треугольнике ABC, вписанном в окружность, $AB < AC$. На стороне AC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку DC делит пополам дугу BC, не содержащую точку A.

3. Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

Решения задач 5-8 без использования соотношений сторон прямоугольного треугольника или теоремы синусов можно сдавать только после сдачи решения с использованием вышеупомянутых фактов. Каждое геометрическое решение этих задач будет награждаться шоколадкой.

5. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABC_1D_1 и A_2BCD_2. Докажите, что точка пересечения прямых AD_2 и CD_1 лежит на высоте BH.

6. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P. Точки X и Y — ортогональные проекции точки P на прямые AC и BC. Докажите, что прямая XY перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из вершины C.

7. На окружности с диаметром AD и центром O выбраны точки B и C по одну сторону от этого диаметра. Около треугольников ABO и CDO описаны окружности, пересекающие отрезок BC в точках F и E. Докажите, что $R^2 = AF \cdot DE$, где R —радиус окружности.

8. На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y такие, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.