Кружок в “Хамовниках”. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 22. Подготовка к региону + немного графов.

1. В остроугольном треугольнике ABC выбрали произвольную точку P. AP пересекает BC в точке D. Пусть K - точка пересечения описанной окружности треугольника PDC и медианы CC_1. Докажите, что описанная окружность треугольника APK всегда проходит через одну и ту же точку, отличную от A.

2. Набор чисел M состоит из 6 различных чисел, дающих в сумме 60. Эти числа написаны на гранях куба, по одному на каждой грани. За один ход можно выбрать три грани с общей вершиной и прибавить к числам на гранях по 1. Найдите количество таких наборов M, что числа этого набора можно написать на гранях куба, а затем за несколько ходов сделать их равными.

3. Пусть задано некоторое натуральное $n > 2$. Найдите наибольшее d такое, что в любом наборе из n натуральных чисел можно найти 3 различных (возможно, пересекающихся) непустых подмножества таких, что сумма чисел в каждом из этих подмножеств кратна d.

---

4. В компании из 80 людей есть ровно 1100 пар друзей (дружба взаимна), но при этом нет таких трёх людей, что они попарно дружат между собой. Докажите, что у каждого человека не более 63 друзей.

5. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 друзей.

6. 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Каждые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

7. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.

Кружок в “Хамовниках”. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 22. Подготовка к региону + немного графов.

1. В остроугольном треугольнике ABC выбрали произвольную точку P. AP пересекает BC в точке D. Пусть K - точка пересечения описанной окружности треугольника KDC и медианы CC_1. Докажите, что описанная окружность треугольника APK всегда проходит через одну и ту же точку, отличную от A.

2. Набор чисел M состоит из 6 различных чисел, дающих в сумме 60. Эти числа написаны на гранях куба, по одному на каждой грани. За один ход можно выбрать три грани с общей вершиной и прибавить к числам на гранях по 1. Найдите количество таких наборов M, что числа этого набора можно написать на гранях куба, а затем за несколько ходов сделать их равными.

3. Пусть задано некоторое натуральное $n > 2$. Найдите наибольшее d такое, что в любом наборе из n натуральных чисел можно найти 3 различных (возможно, пересекающихся) непустых подмножества таких, что сумма чисел в каждом из этих подмножеств кратна d.

---

4. В компании из 80 людей есть ровно 1100 пар друзей (дружба взаимна), но при этом нет таких трёх людей, что они попарно дружат между собой. Докажите, что у каждого человека не более 63 друзей.

5. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 друзей.

6. 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Каждые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

7. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.