Серия 21. Подготовка к региону + немного теории чисел.

1. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

2. 199 волейбольных команд сыграли турнир в один круг, причем все команды одержали поровну побед. Докажите, что из этих команд можно выбрать 33 непересекающиеся тройки, в каждой из которых все команды выиграли друг у друга по циклу.

3. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа n^4?

---

4. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел (a, b, c), что $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.

5. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 - y^3 = 2017^{2017}$?

6. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия длины 2017, все члены которой являются точными степенями, выше десятой?

7. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2 = e_1 - e_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, d_1 и d_2 — седьмые степени, e_1 и e_2 — одиннадцатые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1, d_1 и e_1 найдутся два равных?

Кружок в "Хамовниках". 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 21. Подготовка к региону + немного теории чисел.

1. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

2. 199 волейбольных команд сыграли турнир в один круг, причем все команды одержали поровну побед. Докажите, что из этих команд можно выбрать 33 непересекающиеся тройки, в каждой из которых все команды выиграли друг у друга по циклу.

3. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа n^4?

---

4. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел (a, b, c), что $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.

5. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 - y^3 = 2017^{2017}$?

6. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия длины 2017, все члены которой являются точными степенями, выше десятой?

7. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2 = e_1 - e_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, d_1 и d_2 — седьмые степени, e_1 и e_2 — одиннадцатые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1, d_1 и e_1 найдутся два равных?