Серия 20. Домашнее задание на каникулы.

Решения письменных задач следует отправлять в контакте одному из преподавателей в напечатанном виде!

1. Окружность с центром в точке I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω.

2. У трехчлена $x^2 - ax + b$ коэффициенты a и b — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается $2,008\ldots$. Найдите наименьшее возможное значение a.

3. Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?

4. У дерева 3000 листьев. Докажите, что можно сорвать $\dfrac{8}{15}$ из них так, чтобы оставшаяся тень была не меньше $\dfrac{7}{15}$ от текущей тени всего дерева.

5. В треугольник ABC вписана окружность ω. Она касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — произвольная точка на большей дуге DE окружности ω, F — точка, симметричная точке A относительно прямой DP, M — середина отрезка DE. Докажите, что угол FMP — прямой.

6. Какое из чисел больше: $(2017!)!$ или $2016!^{2017!} \cdot 2017!^{2016!}$?

7(письменная). Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще не закрашенную клетку с номером a, если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a. При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

8. Скажем, что непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *интересное*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все интересные множества натуральных чисел.

9(письменная). Саша выписал несколько последовательных натуральных чисел, при этом какие-то записал красным карандашом, а остальные — синим (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

10. Чему равно количество подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, не содержащих двух последовательных чисел?

11. Множество натуральных чисел разбито на 2002 бесконечные попарно не пересекающиеся арифметические прогрессии. Верно ли, что у каждой из этих прогрессий разность прогрессии не меньше первого члена прогрессии?

12. Даны две концентрические окружности. С помощью циркуля и линейки проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.