

Серия 19. Чтобы понять, какая тема, вам надо просто вспомнить, что вы любите больше всего.

1. Каждый день Фрекен Бок выпекает квадратный торт размером 3 на 3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1 на 1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3 на 3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

2. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

3. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом 0,99.

4. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать такую область S со следующим свойством: для любой прямой ℓ , ограничивающей S , полуплоскость, образуемая при проведении ℓ и содержащая S , содержит больше областей, чем другая полуплоскость.

5. На плоскости даны n прямых общего положения. Они делят её на конечные и бесконечные части. Докажите, что в каждой из них можно поставить по натуральному числу так, чтобы сумма всех чисел по одну сторону от любой прямой равнялась сумме всех чисел по другую сторону от неё.

6. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X , не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.