Серия 18. О гомотетии и замечательных точках.

1. Три окружности одинакового радиуса пересекаются в одной точке. Докажите, что их вторые попарные точки пересечения лежат на окружности того же радиуса.

Во всех задачах далее треугольник подразумевается ABC.
O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, M — точка пересечения медиан, H — ортоцентр.
Вписанная окружность касатеся сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно.
I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающиеся сторон BC, AC и AB в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно.

2. Докажите, что O является ортоцентром серединного треугольника и выведите отсюда, что O, H и M лежат на одной прямой, причём $MH = 2OM$.

3. Докажите, что H ялвяется центром внешней гомотетии, переводящей окружность девяти точек в описанную окружность.

4. В углы неравностороннего треугольника вписаны три равные непересекающиеся окружности. Окружность ω касается их всех внешним образом. Докажите, что центр окружности ω лежит на прямой OI.

б) Докажите, что AA_2 проходит через точку, диаметрально противоположную A_1 на вписанной окружности.

5. Пусть $A_3B_3C_3$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра вписанной окружности его серединного треугольника. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_3B_3C_3$ совпадает с центром описанной окружности треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

6. а) Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке *(точка Нагеля)*.
б) Докажите, что точка Нагеля (N), I и M лежат на одной прямой, причём $MN = 2IM$.