Серия 13. Геометрия.

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.

2. В окружность ω вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка C_1 — диаметрально противоположная точке C. Прямая, проходящая через C_1 и параллельная BC персекает AB и AC в точках M и K соответственно. Докажите, что $C_1M = MK$.

3. В разностороннем треугольнике ABC провели биссектрису BD. Точки E и F – основания перпендикуляров, опущенных на прямую BD из точек A и C соответственно, а точка M расположена на стороне BC так, что DM перпендикулярно BC. Докажите, что $\angle EMD = \angle DMF$.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности ω, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются ω в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

6. Угол треугольника равен $60°$. Докажите, что центр вписанной окружности равноудалён от центра описанной окружности и точки пересечения высот.

7. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ таков, что в него можно вписать окружность и вокруг него можно описать окружность. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F — окружности, вписанные в треугольники FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA соответственно. Обозначим общую внешнюю касательную к окружностям ω_A и ω_B, отличную от прямой AB, через ℓ_{AB}. Аналогично определим прямые ℓ_{BC}, ℓ_{CD}, ℓ_{DE}, ℓ_{EF} и ℓ_{FA}. Пусть A_1 — точка пересечения прямых ℓ_{AB} и ℓ_{FA}; B_1 — точка пересечения прямых ℓ_{BC} и ℓ_{AB}; точки C_1, D_1, E_1 и F_1 определяются аналогично.

Известно, что $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — выпуклый шестиугольник. Докажите, что его диагонали A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 пересекаются в одной точке.