Кружок в “Хамовниках”. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 11. Разнобой-4

1. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geqslant 4xyz - 4$.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. На стороне AB выбрана такая точка K, что $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает отрезок KA_1 в точке P. Докажите, что $PA_1 = PA$.

3. Фишка начала обход квадратной доски с некоторой клетки. Каждым ходом она может пойти либо на одну клетку вправо, либо на одну вверх, либо вниз-влево по-диагонали. Может ли она обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно 1 раз и закончить на клетке, соседней справа от исходной?

4. Заданы нечётные числа m, n. Каждая клетка доски m на n покрашена в синий или красный цвет. Пусть R — количество *строк*, в которых красных клеток больше, чем синих, а B — количество *столбцов*, в которых синих клеток больше, чем красных. Какое максимальное значение может принимать сумма $R + B$?

5. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ - целые числа, лежащие на отрезке $[-1000, 1000]$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была равна 0.

6. Докажите, что существует такое M, что при всех натуральных $n > M$ наименьший простой делитель числа $(n!)^n + 1$ превосходит $n + 1000$.

Кружок в “Хамовниках”. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Серия 11. Разнобой 4

1. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geqslant 4xyz - 4$.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. На стороне AB выбрана такая точка K, что $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает отрезок KA_1 в точке P. Докажите, что $PA_1 = PA$.

3. Фишка начала обход квадратной доски с некоторой клетки. Каждым ходом она может пойти либо на одну клетку вправо, либо на одну вверх, либо вниз-влево по-диагонали. Может ли она обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно 1 раз и закончить на клетке, соседней справа от исходной?

4. Заданы нечётные числа m, n. Каждая клетка доски m на n покрашена в синий или красный цвет. Пусть R — количество *строк*, в которых красных клеток больше, чем синих, а B — количество *столбцов*, в которых синих клеток больше, чем красных. Какое максимальное значение может принимать сумма $R + B$?

5. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ - целые числа, лежащие на отрезке $[-1000, 1000]$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была равна 0.

6. Докажите, что существует такое M, что при всех натуральных $n > M$ наименьший простой делитель числа $(n!)^n + 1$ превосходит $n + 1000$.