Серия 10. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

1. Известно, что $3x - 4y + 5z = 5$. Найдите наименьшее значение выражения
а) $x^2 + y^2 + z^2$;
б) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2$.

2. Сумма чисел a, b, c равна 1. Найдите максимальное значение выражения $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$.

3. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 4b + 6c$. Найдите наибольшее значение $6a + 4b + 2c$.

4. Докажите неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

5(КБШ в форме дробей). Для действительных $x_1, x_2, \ldots x_n$ и положительных $y_1, y_2, \ldots y_n$ докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

6. Сумма квадратов чисел a, b и c равна 3. Докажите, что

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geqslant 3.$$

7. Для положительных x, y и z докажите, что

$$\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geqslant 1.$$

8. Найдите наименьшую такую константу C, для которой существует такая последовательность $\{x_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots.$$

, что для любого n выполнено

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < C.$$