

Алгебра с комбинаторной начинкой

Учимся говорить

1. Придумайте комбинаторное доказательство тождества $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
2. (а) Пусть p простое, $0 < k < p$. Докажите, что C_p^k делится на p .
(б) Докажите, что $\frac{(d_1+d_2+\dots+d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ - целое число.
(с) Докажите, что для любого натурального n число C_{2n}^n делится на $n + 1$.
3. (а) Рассмотрим пути на клетчатом квадрате $n \times n$ из вершины $(0, 0)$ в вершину (n, n) , идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*.
Последовательность из n закрывающихся и n открывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся.
Установите биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.
(б) Постройте какую-нибудь биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n + 2)$ -угольника диагоналями на треугольники.
(с) Докажите, что число путей из $(0,0)$, которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0,0)$ в $(n - 1, n + 1)$. Найдите отсюда число путей Дика. Это число обозначается C_n и называется n -м *числом Каталана*.
4. Найдите сумму
$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0.$$
5. (а) Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины n , в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?
(б) Пользуясь предыдущим пунктом, найдите сумму

$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$$

6. (а) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

Подсказка. Здесь написана сумма по всем подмножествам n -элементного множества числа элементов в подмножестве. Можно на это смотреть так: мы пробегаем все подмножества, и у каждого по разу считаем все его элементы. Сколько же мы так насчитаем? Та же подсказка другими словами: сколько есть способов выбрать из n человек команду (произвольного размера) и в этой команде выбрать капитана?

- (б) Найдите сумму $C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$.

7. Докажите, что при $n > 1$ выполняется равенство

$$C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n+1}nC_n^n = 0.$$

8.* Последовательность функций задана следующим образом:

$$Q_1(x) = x, \quad Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n(x+1)}{Q_n(x)}$$

Пусть

$$Q_n(x) - 1 = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где $A(x), B(x)$ — многочлены.

(а) Найдите степень многочлена $A(X)$.

(б) Найдите старший коэффициент многочлена $A(x)$.

Учимся писать

9. Установите биекцию между путями Дика и способами заполнить таблицу $2 \times n$ числами от 1 до $2n$ так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по убыванию.
10. Пусть p - простое. Сколькими способами можно покрасить карусель из p вагончиков в a цветов, если одинаковыми считаются раскраски, отличающиеся поворотом? Выведите отсюда малую теорему Ферма. (напомним, малая теорема Ферма утверждает, что $a^p - a$ делится на p)