Делители и суммы делителей

Учимся говорить

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\tau(n)$ число натуральных делителей числа n. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n.

1. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$

2. Как посчитать $\tau(n)$, зная разложение n на простые множители?

3. **(a)** Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковыми суммами?
(b) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковым количеством делителей и суммой делителей?

4. Даны два натуральных числа m и n. Известно, что сумма всех делителей числа m равна сумме всех делителей числа n (в сумму делителей входят 1 и само число). Также сумма всех чисел, обратных к делителям m, равна сумме всех чисел, обратных к делителям n. Докажите, что $m = n$.

5. Докажите, что функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ мультипликативны. Напомним, мультипликативность означает, что для любых взаимно простых m и n $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ и $\sigma(nm) = \sigma(m)\sigma(n)$.

Определение. Натуральное число называется совершенным, если сумма его собственных делителей (т. е. всех без самого числа) равна самому числу.
Первые два совершенных числа - это 6 и 28.
А как будет звучать определение совершенного числа в терминах функции $\sigma(n)$?

6. **(a)** Докажите, что если число $2^p - 1$ простое, то число $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ совершенное.
(b) Докажите, что любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ - простое.
Существуют ли нечетные совершенные числа, неизвестно.

7. **(a)** Докажите, что найдется натуральное m, для которого $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/m > 100$.

(b) Докажите, что существует натуральное n, для которого $\sigma(n) > 100n$. Здесь может быть полезен предыдущий пункт.

8. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей.

9. На Великой Китайской стене написаны все натуральные числа от $9 \cdot 10^k$ до $12 \cdot 10^k$ (k - натуральное). Катя выбрала у каждого из выписанных чисел собственный делитель. Докажите, что найдется делитель, который Катя выбрала хотя бы два раза.

Учимся писать

10. Дано натуральное число n. Известно, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей n делится на 24.

11. Пусть n - натуральное число, d и d' - два его делителя, $d < d'$. Докажите неравенство: $d' > d + d^2/n$.