

Принцип Дирихле в геометрии

0. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не больше $\frac{1}{2}$.

Учимся говорить

1. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между некоторыми двумя из них не больше $\frac{180^\circ}{n}$.
2. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{7}$.
3. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в p цветов. Докажите, что существует m горизонтальных и n вертикальных прямых, на пересечении которых лежат точки одного цвета.
(а) $p = 2, m = n = 2$; (б) n, m и p — произвольные натуральные числа.
4. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 , со сторонами, параллельными сторонам квадрата (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш также вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
5. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

Учимся писать

6. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?
7. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно целиком накрыть круг радиуса 2?

Принцип Дирихле в геометрии

0. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не больше $\frac{1}{2}$.

Учимся говорить

1. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между некоторыми двумя из них не больше $\frac{180^\circ}{n}$.
2. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{7}$.
3. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в p цветов. Докажите, что существует m горизонтальных и n вертикальных прямых, на пересечении которых лежат точки одного цвета.
(а) $p = 2, m = n = 2$; (б) n, m и p — произвольные натуральные числа.
4. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 , со сторонами, параллельными сторонам квадрата (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш также вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
5. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

Учимся писать

6. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?
7. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно целиком накрыть круг радиуса 2?