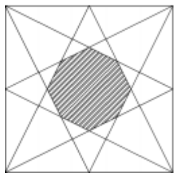
7 класс | **Формула Пика** | 7 апреля 2018

Формула Пика. *Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой сетки. Внутри него лежит v узлов, а на границе g (v – Внутри, g – на Границе). Тогда площадь этого многоугольника равна* $v + \frac{g}{2} - 1$.

1. Докажите формулу Пика для
а) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;
б) прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки;
в) многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана;
г) произвольного треугольника;
д) произвольного многоугольника.

2. Можно ли клетчатый квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?

3. Все стороны треугольника больше 6, а все его вершины лежат в узлах целочисленной сетки. Какое наименьшее значение может принимать его площадь?



4. Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как на рисунке. Найти отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведёнными отрезками.

5. Шахматный король обошёл все клетки доски 8×8 и вернулся на исходную клетку. Оказалось, что его путь не имеет самопересечений. Фигуру какой площади он ограничивает?

6. Квадрат $n\times n$ произвольным образом нарисован на клетчатой бумаге. Докажите, что он покрывает не более $(n+1)^2$ узлов решётки.

7. Докажите, что найдётся прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2018}$.

8. Какое наименьшее значение может принимать площадь выпуклого пятиугольника с вершинами в узлах целочисленной решётки?

9. Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

10. На большой шахматной доске отметили $2n$ клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.

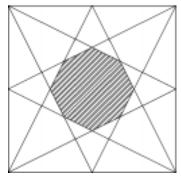
7 класс | **Формула Пика** | 7 апреля 2018

Формула Пика. *Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой сетки. Внутри него лежит v узлов, а на границе g (v – Внутри, g – на Границе). Тогда площадь этого многоугольника равна* $v + \frac{g}{2} - 1$.

1. Докажите формулу Пика для
а) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;
б) прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки;
в) многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана;
г) произвольного треугольника;
д) произвольного многоугольника.

2. Можно ли клетчатый квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?

3. Все стороны треугольника больше 6, а все его вершины лежат в узлах целочисленной сетки. Какое наименьшее значение может принимать его площадь?



4. Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами так, как на рисунке. Найти отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведёнными отрезками.

5. Шахматный король обошёл все клетки доски 8×8 и вернулся на исходную клетку. Оказалось, что его путь не имеет самопересечений. Фигуру какой площади он ограничивает?

6. Квадрат $n\times n$ произвольным образом нарисован на клетчатой бумаге. Докажите, что он покрывает не более $(n+1)^2$ узлов решётки.

7. Докажите, что найдётся прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2018}$.

8. Какое наименьшее значение может принимать площадь выпуклого пятиугольника с вершинами в узлах целочисленной решётки?

9. Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

10. На большой шахматной доске отметили $2n$ клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.