

1. На столе стоят 2048 стаканов с водой. Можно взять любые два и уравнять количество воды в них. Докажите, что можно уравнять количество воды во всех стаканах.

2. Докажите с помощью индукции следующие тождества:

а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$; г) $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

д) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Из клетчатого квадрата со стороной 1024 вырезали одну клетку. Докажите, что получившуюся фигуру можно заполнить трёхклеточными уголками.

4. Число a таково, что число $a + \frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ — тоже целое.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в двоичную систему счисления).

6. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина во всех бензоколонках хватит на то, чтобы проехать целый круг. Есть машина с пустым достаточно большим бензобаком. Докажите, что всегда можно найти бензоколонку, стартовав с которой, удастся проехать целый круг.

7. В стране $n \geq 3$ городов. Между любыми двумя из них проведена дорога с односторонним движением. Оказалось, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно построить маршрут, проходящий по всем городам один раз, и возвращающийся в начальный город.

8. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

9. Для любого натурального $n > 2$ докажите, что $\sqrt{2\sqrt{3\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$.

10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат. Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

1. На столе стоят 2048 стаканов с водой. Можно взять любые два и уравнять количество воды в них. Докажите, что можно уравнять количество воды во всех стаканах.

2. Докажите с помощью индукции следующие тождества:

а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$; г) $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

д) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Из клетчатого квадрата со стороной 1024 вырезали одну клетку. Докажите, что получившуюся фигуру можно заполнить трёхклеточными уголками.

4. Число a таково, что число $a + \frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ — тоже целое.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в двоичную систему счисления).

6. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина во всех бензоколонках хватит на то, чтобы проехать целый круг. Есть машина с пустым достаточно большим бензобаком. Докажите, что всегда можно найти бензоколонку, стартовав с которой, удастся проехать целый круг.

7. В стране $n \geq 3$ городов. Между любыми двумя из них проведена дорога с односторонним движением. Оказалось, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно построить маршрут, проходящий по всем городам один раз, и возвращающийся в начальный город.

8. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

9. Для любого натурального $n > 2$ докажите, что $\sqrt{2\sqrt{3\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$.

10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат. Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.