7 класс

Графы. Деревья

10 марта 2018

Определение. *Дерево* — это связный граф без циклов.

1. а) Докажите, что в любом дереве, в котором хотя бы 2 вершины, есть вершина степени 1 (такие вершины называются *висячими*).

б) Сколько рёбер в дереве на n вершинах?

2. а) Докажите, что в любом связном графе можно выделить подграф, содержащий все вершины и являющийся деревом (такой подграф называется *остовом*).

б) Докажите, что в связном графе на n вершинах хотя бы $n-1$ ребро.

3. Докажите, что вершины дерева можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.

4. Докажите, что в любом связном графе существует вершина, при удалении которой граф не перестаёт быть связным.

5. Волейбольная сетка имеет форму прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее число её верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

6. В военную часть часть приехало n незнакомых друг другу новобранцев. Каждому из них прапорщик сказал натуральное число так, что сумма всех n чисел равна $2n-2$. Докажите, что их можно познакомить между собой так, чтобы каждый новобранец имел количество знакомых, равное числу, сообщённому ему прапорщиком.

7. В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть? (В королевстве действовал закон: "вассал моего вассала — не мой вассал".)

8. В стране 100 городов и 199 дорог между ними. Из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно закрыть все дороги некоторого циклического маршрута так, чтобы по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого.

9. Дано дерево с $n > 2$ вершинами. Пусть A — множество всех его висячих вершин, количество которых чётно. Добавим к этому дереву рёбра некоторого цикла, проходящего только по вершинам множества A и ровно по одному разу. Докажите, что вершины полученного графа можно правильно раскрасить в три цвета (т.е. никакие две вершины одного цвета не должны быть соединены ребром).

10. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Мог ли кубик быть раскрашен так, что каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

7 класс

Графы. Деревья

10 марта 2018

Определение. *Дерево* — это связный граф без циклов.

1. а) Докажите, что в любом дереве, в котором хотя бы 2 вершины, есть вершина степени 1 (такие вершины называются *висячими*).

б) Сколько рёбер в дереве на n вершинах?

2. а) Докажите, что в любом связном графе можно выделить подграф, содержащий все вершины и являющийся деревом (такой подграф называется *остовом*).

б) Докажите, что в связном графе на n вершинах хотя бы $n-1$ ребро.

3. Докажите, что вершины дерева можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.

4. Докажите, что в любом связном графе существует вершина, при удалении которой граф не перестаёт быть связным.

5. Волейбольная сетка имеет форму прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее число её верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась?

6. В военную часть часть приехало n незнакомых друг другу новобранцев. Каждому из них прапорщик сказал натуральное число так, что сумма всех n чисел равна $2n-2$. Докажите, что их можно познакомить между собой так, чтобы каждый новобранец имел количество знакомых, равное числу, сообщённому ему прапорщиком.

7. В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть? (В королевстве действовал закон: "вассал моего вассала — не мой вассал".)

8. В стране 100 городов и 199 дорог между ними. Из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно закрыть все дороги некоторого циклического маршрута так, чтобы по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого.

9. Дано дерево с $n > 2$ вершинами. Пусть A — множество всех его висячих вершин, количество которых чётно. Добавим к этому дереву рёбра некоторого цикла, проходящего только по вершинам множества A и ровно по одному разу. Докажите, что вершины полученного графа можно правильно раскрасить в три цвета (т.е. никакие две вершины одного цвета не должны быть соединены ребром).

10. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Мог ли кубик быть раскрашен так, что каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?