7 класс **Теория чисел возвращается** 3 марта 2018

1. Докажите, что простых чисел вида $6k+5$ бесконечно много.

2. Существует ли натуральное число n, у которого сумма цифр такая же, как у числа n^2-1?

3. Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители в совокупности входит не больше 23 различных простых чисел.

4. Некоторое натуральное число N разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли случиться так, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

5. Даны натуральные числа a и b, причем $a<1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

6. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в записи которого все цифры чётны.

Определение. *Целая часть* числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x, и её принято обозначать $[x]$. *Дробной частью* числа x называется выражение, равное $x-[x]$, и её принято обозначать $\{x\}$.

7. Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители в степени, равной $[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\ldots$

8. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

9. Для составного натурального числа n нашлось натуральное k такое, что, каков бы ни был делитель d числа n, $1<d<n$, число $n-kd$ – натуральный делитель n. Докажите, что n — квадрат простого числа.

10. Существуют ли три различных ненулевых целых числа с суммой 0, сумма одиннадцатых степеней которых является точным квадратом?

11. При каких натуральных n число $n^2+5n+23$ является точным квадратом?

7 класс **Теория чисел возвращается** 3 марта 2018

1. Докажите, что простых чисел вида $6k+5$ бесконечно много.

2. Существует ли натуральное число n, у которого сумма цифр такая же, как у числа n^2-1?

3. Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители в совокупности входит не больше 23 различных простых чисел.

4. Некоторое натуральное число N разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли случиться так, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

5. Даны натуральные числа a и b, причем $a<1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

6. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в записи которого все цифры чётны.

Определение. *Целая часть* числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x, и её принято обозначать $[x]$. *Дробной частью* числа x называется выражение, равное $x-[x]$, и её принято обозначать $\{x\}$.

7. Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители в степени, равной $[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\ldots$

8. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

9. Для составного натурального числа n нашлось натуральное k такое, что, каков бы ни был делитель d числа n, $1<d<n$, число $n-kd$ – натуральный делитель n. Докажите, что n — квадрат простого числа.

10. Существуют ли три различных ненулевых целых числа с суммой 0, сумма одиннадцатых степеней которых является точным квадратом?

11. При каких натуральных n число $n^2+5n+23$ является точным квадратом?