7 класс **Неравенства — 2** 10 февраля 2018

1. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник с периметром 12?

2. Двоечник Гриша считает, что для нахождения суммы двух различных дробей (с положительными числителями и знаменателями) надо сложить числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем. Докажите, что сумма Гриши больше наименьшего слагаемого и меньше наибольшего слагаемого.

3. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажите, что $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Неравенство Коши для трёх чисел. Раскрыв скобки в выражении $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

6. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что
$$(2+a)(2+b)(2+c) \geqslant 27.$$

7. а) Для действительных чисел a, b и положительных p, q докажите неравенство $\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q} \geqslant \frac{(a+b)^2}{p+q}$.

б) Неравенство КБШ в виде дробей. Для действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что
$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

8. Неравенство о среднем гармоническом и среднем арифметическом. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

7 класс **Неравенства — 2** 10 февраля 2018

1. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник с периметром 12?

2. Двоечник Гриша считает, что для нахождения суммы двух различных дробей (с положительными числителями и знаменателями) надо сложить числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем. Докажите, что сумма Гриши больше наименьшего слагаемого и меньше наибольшего слагаемого.

3. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажите, что $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{b^2+c^2}+\frac{c}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Неравенство Коши для трёх чисел. Раскрыв скобки в выражении $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

6. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что
$$(2+a)(2+b)(2+c) \geqslant 27.$$

7. а) Для действительных чисел a, b и положительных p, q докажите неравенство $\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q} \geqslant \frac{(a+b)^2}{p+q}$.

б) Неравенство КБШ в виде дробей. Для действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что
$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

8. Неравенство о среднем гармоническом и среднем арифметическом. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$