7 класс **Неравенства** 3 февраля 2018

1. Даны неотрицательные числа a и b. Рассмотрим следующие величины: $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — *среднее гармоническое*, $G = \sqrt{ab}$ — *среднее геометрическое*, $A = \frac{a+b}{2}$ — *среднее арифметическое*, $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — *среднее квадратичное*. Докажите, что **а)** $H \leqslant G$; **б)** $G \leqslant A$; **в)** $A \leqslant K$.

Замечание. Для любых неотрицательных a и b справедлива цепочка неравенств $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство в любом из этих неравенств равносильно равенству чисел a и b, и равносильно равенству всех средних сразу.

2. Для действительных a, b, c докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

3. Для положительных a, b, c докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c$.

4. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

5. Для неотрицательных a, b, c, d докажите, что $a+b+c+d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$.

6. Для положительных x, y, z докажите, что

а) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$;

б) $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geqslant 9$.

7. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

8. Сумма неотрицательных чисел a, b, c не меньше 3. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geqslant 6.$$

9. Укажите какое-нибудь натуральное n, при котором $1,001^n > 10$.

10. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c.$$

7 класс **Неравенства** 3 февраля 2018

1. Даны неотрицательные числа a и b. Рассмотрим следующие величины: $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — *среднее гармоническое*, $G = \sqrt{ab}$ — *среднее геометрическое*, $A = \frac{a+b}{2}$ — *среднее арифметическое*, $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — *среднее квадратичное*. Докажите, что **а)** $H \leqslant G$; **б)** $G \leqslant A$; **в)** $A \leqslant K$.

Замечание. Для любых неотрицательных a и b справедлива цепочка неравенств $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство в любом из этих неравенств равносильно равенству чисел a и b, и равносильно равенству всех средних сразу.

2. Для действительных a, b, c докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

3. Для положительных a, b, c докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c$.

4. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

5. Для неотрицательных a, b, c, d докажите, что $a+b+c+d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$.

6. Для положительных x, y, z докажите, что

а) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$;

б) $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geqslant 9$.

7. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

8. Сумма неотрицательных чисел a, b, c не меньше 3. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geqslant 6.$$

9. Укажите какое-нибудь натуральное n, при котором $1,001^n > 10$.

10. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c.$$