7 класс | Сравнения по модулю | 18 ноября 2017

**Определение 1.** Числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $m$, если $a-b$ делится на $m$.

**Определение 2.** Числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $m$, если $a$ и $b$ имеют одинаковые остатки при делении на $m$.

*Свойства сравнений.*

1. $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
6. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
7. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
8. Если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k,m)=1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

**1.** Найдите остаток от деления
**а)** $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
**б)** $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ на 2017;
**в)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 102$ на 103.

**2.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $16^{n+2}+23^{n+1}+37^n$ делится на 7.

**3.** Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

**4.** $5x+8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт
**а)** $5x+60y$; **б)** $18x-31y$; **в)** $2x-2y$?

**5.** Числа $m$ и $n$ нечётны. Докажите, что $1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n \,\vdots\, m$.

**6.** На длинной доске записали число $8^{2017}$ в десятичной записи. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем вместо получившегося числа снова записали его сумму цифр. Этот процесс продолжался до тех пор, пока не осталось однозначное число. Что это за число? А если бы изначально было записано $2^{2017}$?

**7. а)** Дано натуральное число $n$. При каких натуральных $a$ среди чисел $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (n-1) \cdot a$ встречаются все остатки при делении на $n$?

**б)** Докажите, что для взаимно простых чисел $m$ и $n$ найдётся число $x$ такое, что $mx \equiv 1 \pmod{n}$.

**в)** Докажите, что для двух натуральных чисел $m$ и $n$ и их наибольшего общего делителя $d$ существуют целые $x$ и $y$ такие, что $mx+ny=d$.

**8. Малая теорема Ферма.** Докажите, что для простого $p$ и натурального $a$, не делящегося на $p$, выполнено $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

**9.** Докажите, что $n^7-n$ делится на 42 при любом натуральном $n$.

**10.** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают все остатки при делении на $n$. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ также дают все остатки при делении на $n$. При каких $n$ может получиться так, что числа $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ дают все остатки при делении на $n$?

7 класс | Сравнения по модулю | 18 ноября 2017

**Определение 1.** Числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $m$, если $a-b$ делится на $m$.

**Определение 2.** Числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $m$, если $a$ и $b$ имеют одинаковые остатки при делении на $m$.

*Свойства сравнений.*

1. $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
6. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
7. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
8. Если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k,m)=1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

**1.** Найдите остаток от деления
**а)** $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
**б)** $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ на 2017;
**в)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 102$ на 103.

**2.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $16^{n+2}+23^{n+1}+37^n$ делится на 7.

**3.** Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

**4.** $5x+8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт
**а)** $5x+60y$; **б)** $18x-31y$; **в)** $2x-2y$?

**5.** Числа $m$ и $n$ нечётны. Докажите, что $1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n \,\vdots\, m$.

**6.** На длинной доске записали число $8^{2017}$ в десятичной записи. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем вместо получившегося числа снова записали его сумму цифр. Этот процесс продолжался до тех пор, пока не осталось однозначное число. Что это за число? А если бы изначально было записано $2^{2017}$?

**7. а)** Дано натуральное число $n$. При каких натуральных $a$ среди чисел $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (n-1) \cdot a$ встречаются все остатки при делении на $n$?

**б)** Докажите, что для взаимно простых чисел $m$ и $n$ найдётся число $x$ такое, что $mx \equiv 1 \pmod{n}$.

**в)** Докажите, что для двух натуральных чисел $m$ и $n$ и их наибольшего общего делителя $d$ существуют целые $x$ и $y$ такие, что $mx+ny=d$.

**8. Малая теорема Ферма.** Докажите, что для простого $p$ и натурального $a$, не делящегося на $p$, выполнено $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

**9.** Докажите, что $n^7-n$ делится на 42 при любом натуральном $n$.

**10.** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают все остатки при делении на $n$. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ также дают все остатки при делении на $n$. При каких $n$ может получиться так, что числа $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ дают все остатки при делении на $n$?