

1. Зоолог приобрёл пару кроликов. Природа кроликов такова, что каждая пара кроликов раз в месяц производит на свет ещё пару кроликов, а новорожденные приносят первое потомство уже через два месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет через n месяцев?

2. Сколькими способами доску $2 \times n$ можно замостить доминошками?

3. а) Лягушка находится в левой клетке полосы $1 \times n$. Она умеет прыгать на одну или на две клетки вправо. Сколькими способами она может допрыгать до последней клетки?

б) Докажите тождество $F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \dots$

в) Теперь эта лягушка находится в левой клетке полосы $1 \times (m+n)$. На m -й клетке сидит комар. Сколькими способами лягушка может допрыгать до последней клетки доски, съев комара? А не съев комара?

г) С помощью пункта в) докажите тождество $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.

4. Сколько существует последовательностей из цифр 1 и 2 с суммой n ?

5. Сколько существует слов длины n , состоящих только из букв "а" и "б", у которых в записи

а) нет двух букв "б" подряд?

б) количество букв "б" не превосходит номера самой первой буквы "б"?

6. Придумайте набор из 10 гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 88 граммов включительно даже в том случае, если любая одна гирька потеряна (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую).

7. Рассмотрим последовательность 0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, и так далее. Каждое следующее число получается из предыдущего так: каждый 0 заменяется на 1, каждая 1 — на 10.

а) Рассмотрим другое описание. Каждое следующее число получается так: к предыдущему числу приписываем к нему справа предпредыдущее. Докажите, что эти два описания задают одну и ту же последовательность.

б) Сколько цифр, сколько нулей и единиц в n -м числе?

8. Имеется 10 отрезков, длина каждого из которых — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

9. Докажите, что любое число единственным образом представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи, среди которых нет двух соседних и нет первого (но может быть равное ему второе).

10. Кирилл загадал число от 1 до 144. Илья может выбрать любое подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ "да" Илья заплатит 2 рубля, а за ответ «нет» — 1 рубль. Какое наименьшее количество денег потребует Илья, чтобы наверняка угадать число?

1. Зоолог приобрёл пару кроликов. Природа кроликов такова, что каждая пара кроликов раз в месяц производит на свет ещё пару кроликов, а новорожденные приносят первое потомство уже через два месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет через n месяцев?

2. Сколькими способами доску $2 \times n$ можно замостить доминошками?

3. а) Лягушка находится в левой клетке полосы $1 \times n$. Она умеет прыгать на одну или на две клетки вправо. Сколькими способами она может допрыгать до последней клетки?

б) Докажите тождество $F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \dots$

в) Теперь эта лягушка находится в левой клетке полосы $1 \times (m+n)$. На m -й клетке сидит комар. Сколькими способами лягушка может допрыгать до последней клетки доски, съев комара? А не съев комара?

г) С помощью пункта в) докажите тождество $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.

4. Сколько существует последовательностей из цифр 1 и 2 с суммой n ?

5. Сколько существует слов длины n , состоящих только из букв "а" и "б", у которых в записи

а) нет двух букв "б" подряд?

б) количество букв "б" не превосходит номера самой первой буквы "б"?

6. Придумайте набор из 10 гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 88 граммов включительно даже в том случае, если любая одна гирька потеряна (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую).

7. Рассмотрим последовательность 0, 1, 10, 101, 10110, 10110101, и так далее. Каждое следующее число получается из предыдущего так: каждый 0 заменяется на 1, каждая 1 — на 10.

а) Рассмотрим другое описание. Каждое следующее число получается так: к предыдущему числу приписываем к нему справа предпредыдущее. Докажите, что эти два описания задают одну и ту же последовательность.

б) Сколько цифр, сколько нулей и единиц в n -м числе?

8. Имеется 10 отрезков, длина каждого из которых — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

9. Докажите, что любое число единственным образом представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи, среди которых нет двух соседних и нет первого (но может быть равное ему второе).

10. Кирилл загадал число от 1 до 144. Илья может выбрать любое подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ "да" Илья заплатит 2 рубля, а за ответ «нет» — 1 рубль. Какое наименьшее количество денег потребует Илья, чтобы наверняка угадать число?