

**Определение.** Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  для всех натуральных  $n$ .

**Воспоминание.** Для любого натурального  $m$  найдётся число Фибоначчи  $F_n$  ( $n \geq 1$ ), кратное  $m$ .

1. Найдите период последовательности остатков чисел Фибоначчи при делении на  $n$ , где  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ .

2. Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  верно

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

3. а) Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

б) Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  верно

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

*Подсказка.* Докажите, что для  $m \geq n$  верно  $(F_m, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$ .

4. Рассмотрим последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на натуральное  $n$ . Докажите, что нули там встречаются на равном расстоянии друг от друга.

5. Докажите, что при всех натуральных  $n$  верно

а)  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;

б)  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ ;

в)  $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ ;

г)  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ ;

д)  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ;

е)  $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ ;

ё)  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

6. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$

**Определение.** Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  для всех натуральных  $n$ .

**Воспоминание.** Для любого натурального  $m$  найдётся число Фибоначчи  $F_n$  ( $n \geq 1$ ), кратное  $m$ .

1. Найдите период последовательности остатков чисел Фибоначчи при делении на  $n$ , где  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ .

2. Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  верно

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

3. а) Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

б) Докажите, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  верно

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

*Подсказка.* Докажите, что для  $m \geq n$  верно  $(F_m, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$ .

4. Рассмотрим последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на натуральное  $n$ . Докажите, что нули там встречаются на равном расстоянии друг от друга.

5. Докажите, что при всех натуральных  $n$  верно

а)  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;

б)  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ ;

в)  $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ ;

г)  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ ;

д)  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ;

е)  $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ ;

ё)  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

6. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$