Неравенства

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \leqslant 2.$$

2. При положительных x, y, z докажите неравенство

$$x^4 + y^4 + z^2 \geqslant \sqrt{8}xyz.$$

3. Пусть x, y, z — положительные числа, каждое из которых не меньше 2. Докажите неравенство

$$(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \geqslant 125xyz.$$

4. Пусть $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ — положительные числа. Докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)\ldots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$$

существует и найдите $a_1, a_2, \ldots, a_n$, при которых оно достигается.

5. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a+b+c \geqslant abc$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}abc$.

6. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

8. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}\ .$$