Теория чисел

1. При каких n существуют натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b^2.$$

2. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

3. Пусть a и b различные натуральные числа, такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

4. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала).
(a) Сколько раз она выписала простое число p?
(b) Сколько раз она выписала произвольное число n?

5. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

6. Последовательности a_n и b_n заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2018} < 5$.

7. Докажите, что для любого простого числа p, существует простое число q, такое, что для всех $n \in \mathbb{Z}$, $q \nmid n^p - p$