Графы

1. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые числа от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

2. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого. Докажите, что школьников можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

3. В стране 77 городов, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что из любого города в любой другой существует путь длины кратной трём, не проходящий ни через какой город больше одного раза. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

4. В некоторой стране два вида транспорта: автомобильный и железнодорожный. Причем из каждого города выходит одинаковое число дорог того и другого вида, и от любого города можно добраться в любой другой. Джеймсу Бонду не разрешается пользоваться одним и тем же видом транспорта два раза подряд. Докажите, что он сможет добраться из любого города в любой, не нарушая запрета.

5. Пусть G — сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа G в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.

6. В едином и неделимом государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, и только президент имеет право ездить в любом направлении. После многократных поездок по стране президент заметил, что если выехать из любого города, проехать по любому количеству дорог и вернуться обратно, то разность количества дорог, которые он проехал по правилам и тех дорог, которые он проехал не по правилам всегда делится на три. Докажите, что страну можно разделить на три независимые республики так, что из первой республики дороги будут вести только во вторую, из второй — только в третью и из третьей — только в первую.

7. В графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно сделать любое другое не более чем за $n-1$ ходов.