Сумма Минковского

Для любых двух подмножеств A и B координатной плоскости (пространства, прямой) определим их *сумму Минковского* $A+B$ как множество, состоящее из концов всех векторов вида $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, где конец вектора $\mathbf{a}$ принадлежит A, а конец вектора $\mathbf{b}$ принадлежит B (все векторы отложены от начал координат).

1. Как меняется сумма Минковского двух фигур при параллельном переносе одной из них на некоторый вектор? А при замене системы координат?

2. Нарисуйте сумму Минковского **(a)** двух отрезков; **(b)** треугольника и отрезка; **(c)** контура треугольника и отрезка; **(d)** треугольника и круга; **(e)** треугольника и квадрата. *Придумайте интуитивно понятное для себя определение суммы Минковского.*

3. Петя записал на доску m различных натуральных чисел, и Вася тоже записал на доску n различных натуральных чисел. Митя вычислил $m \cdot n$ всевозможных попарных сумм чисел Пети и Васи. Какое наименьшее количество различных чисел мог получить Митя?

4. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника A и B, у них a и b сторон соответственно. На сторонах многоугольников расставлены стрелочки в направлении обхода против часовой стрелки, получился набор из $a+b$ векторов. **(a)** Докажите, что существует такой выпуклый многоугольник C, при обходе сторон которого против часовой стрелки получается такой же набор из $a+b$ векторов. **(b)** Докажите, что $C = A+B$. **(c)** Докажите, что периметр суммы Минковского двух выпуклых многоугольников равен сумме периметров этих многоугольников.

5. Выпуклый многоугольник периметра P разрезали прямолинейным разрезом длины l на две части. Обозначим через S множество середин отрезков с концами в разных частях. Найдите периметр S.

6. Проекция выпуклой фигуры A на любую прямую имеет длину 1. Фигура A^* симметрична относительно начала координат. Докажите, что $A + A^*$ — это круг. Кстати, $A + A^*$ называется *симметризацией Минковского.*

7. Диаметр выпуклого многоугольника равен 1. Докажите, что его периметр не превосходит π.

8. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Обозначим через Φ множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры Φ.