Разнобой по геометрии

1. Угол A — наименьший угол треугольника ABC. На меньшей дуге BC описанной окружности ABC выбрана точка D. Серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AD в точках M, N соответственно. Пусть T — точка пересечения BM и CN. Докажите, что $BT + CT$ не превосходит диаметр описанной окружности ABC.

2. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно, а на отрезке AN выбрана точка Q так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

4. Пусть M — середина меньшей дуги BC описанной окружности ABC. Высота треугольника, проведенная из A пересекает описанную окружность в точке N. Через центр описанной окружность треугольника ABC (точку O) проведены две прямые, параллельные MB и MC, пересекающие AB и AC в K и L соответственно. Докажите, что $NK = NL$.

5. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две непересекающиеся окружности. AB — общая внешняя касательная окружностей, CD — общая внутренняя касательная (A, C принадлежат Γ_1 и B, D принадлежат Γ_2). AC и BD пересекаются в точке E. F принадлежит Γ_1, касательная к Γ_1 в F пересекается с серединным перпендикуляром к EF в точке M. MG — касательная к Γ_2 в G. Докажите, что $MF = MG$.

6. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q (Q лежит между P и C) так, что $BP = QC$. Описанная окружность треугольника APQ пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Пусть T — пересечение EP и FQ. Прямые, проходящие через середину BC и параллельные AB и AC, пересекают EP и FQ в точках X, Y соответственно. Пусть S — пересечение AM и описанной окружности APQ. Докажите, что описанные окружности TXY и APQ касаются в точке S.