Многочлены. Непрерывность. Асимптотика.

0. *Эту задачу сдавать не надо, но надо осознать.*
(a) Докажите, что любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.
(b) Докажите, что приведённый многочлен чётной степени достигает минимума.

1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

3. Многочлен $Q(x)$ таков, что уравнение $Q(x) = x$ не имеет вещественных решений. Докажите, что уравнение $Q(Q(x)) = x$ также не имеет вещественных решений.

4. Пусть $P(x)$ — многочлен, а последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2$ и т. д. Числа в последовательности не повторяются.
(a) Докажите, что $P(x)$ не может быть 1001 степени.
(b) Какую степень и старший коэффициент может иметь $P(x)$?

5. Дан многочлен $P(x)$ и числа a_1, a_2, b_1, b_2. Оказалось, что для любого действительного числа x верно $P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(x)$. Докажите, что $P(x)$ имеет вещественный корень.

6. Пусть многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

7. Шесть членов команды Фаталии на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали a_1, a_2, $\ldots$, a_{13} баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$).

Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?