

Гармонические четырехугольники

Определение. Симедианой треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

- (а) Пусть BM — симедиана треугольника ABC . Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB^2}{BC^2}$.
(б) (Точка Лемуана.) Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

Определение. Вписанный четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.

- (а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{DC^2}$.
(б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

Определение. Двойным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

В случае, если $(A, B, C, D) = -1$, четверка точек A, B, C, D называется гармонической.

- (а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC . Докажите, что точки A, C, M, P образуют гармоническую четверку точек.
(б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC , либо параллельны этой прямой.
(с) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам.
(д) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.
- Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.
- Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB . Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH .
- $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.