

Тригонометрия

1. На листе бумаги нарисован график функции $y = \sin x$. Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на 2π , совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.
2. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдется такое натуральное n , что $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin \frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \dots \sin \frac{2018\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

4. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:
(а) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$; (б) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$?
5. Существует ли такое положительное число α , что при всех действительных x верно неравенство $|\cos x| + |\cos \alpha x| > \sin x + \sin \alpha x$?
6. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.
7. Даны различные натуральные числа a, b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c , отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.