Про ориентированные графы

1. В связном графе степени всех вершин чётны. Докажите, что на рёбрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия:
(a) двигаясь по стрелкам, можно добраться от каждой вершины до любой другой;
(b) для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны.

2. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

3. Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины меньше либо равно двух.
(a) Докажите, что в любом полном ориентированном графе найдётся царь.
(b) Докажите, что в полном ориентированном графе не может быть ровно двух царей.

4. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с $n > 4$ вершинами можно удалить одну из вершин, не потеряв при этом сильную связность.

5. В стране Ориентирия 100 городов, каждые два города соединены дорогой с двусторонним движением. Два министра играют в игру. Первый каждым своим вводит одностороннее движение на любой еще не ориентированной дороге. Второй каждым своим ходом вводит одностороннее движение на любом количестве от 0 до 98 еще не ориентированных дорог. Игра заканчивается, когда все дороги ориентированы. Первый министр выигрывает, если найдется такой город, что из него можно выехать по какой-нибудь дороге и, соблюдая правила движения, вернуться обратно. Иначе выигрывает второй министр. Какой министр выигрывает при правильной игре?

6. В некотором государстве 101 город.
(a) Каждый город соединен с каждым из остальных дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
(b) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

7. Докажите, что для любого n можно написать по кругу несколько цифр от 0 до 9 так, чтобы среди них встретились ровно по разу всевозможные n-значные комбинации из цифр, идущие подряд по часовой стрелке.