

Тренировочная олимпиада

1. Вещественные числа a и b таковы, что уравнение $\sin x = ax + b$ имеет ровно два вещественных решения. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = ax + b \\ \cos x = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно вещественное решение.

2. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

3. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо?
4. В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, O — центр его описанной сферы, H — точка пересечения высот треугольника BCD . Докажите, что $AOH \perp BCD$.
5. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что среди любых 2018 подряд идущих натуральных чисел хотя бы одно отмечено. Докажите, что существуют два отмеченных числа, одно из которых делится на другое.