

Тренировочная олимпиада

1. Про целые числа a, b, c, d известно, что

$$d = (a + 3)^2 + (b + 4)^2 - (c + 5)^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

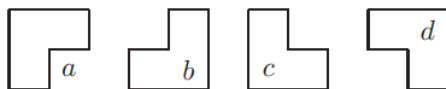
Докажите, что d является точным квадратом.

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных решения.
3. Точка M — середина меньшей дуги BC окружности ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . Прямые, проходящие через центр O окружности ω параллельные прямым MB и MC , пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку O параллельно прямой KL , пересекает высоту треугольника ABC , опущенную из точки A , в точке T . Докажите, что $LT = OK$.
4. Для каждого конечного непустого множества чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, упорядоченных по возрастанию, *медианой* этого множества назовем число $a_{\frac{n+1}{2}}$ при нечетном n и число $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ при четном n .

Дано натуральное число N . Непустое подмножество множества $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ называется *статистическим*, если медиана этого подмножества совпадает со средним арифметическим этого подмножества.

Докажите, что количество статистических множеств нечётно.

5. Прямоугольник 2018×2019 разрезан на уголки из трех клеток:



Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.