Стереометрический разнобой

1. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

3. Плоскость Π касается сферы с диаметром AB в точке A. Из точки C этой плоскости проведена касательная CD к сфере. Прямая BD пересекает плоскость Π в точке F. Докажите, что $CA = CF$.

4. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра хорошие, то четвёртое боковое ребро также является хорошим.

5. В пространстве зафиксированы прямая a и точка A на ней не лежащая. Через точку A проводится произвольная прямая ℓ. На прямых a и ℓ отмечаются точки X и Y соответственно так, что XY — общий перпендикуляр к a и ℓ. Найдите геометрическое место точек Y.

6. В тетраэдре $ABCD$ определим точку H_a как проекцию вершины A на плоскость BCD, точку H_{ac} как проекцию точки H_a на прямую AC, аналогично определим другие такие точки. Докажите, что если плоские углы при вершине A равны, то точки H_{ab}, H_{ac}, H_{ad}, H_{ba}, H_{ca} и H_{da} лежат на одной сфере.