

## Готовимся к региону. Про клеточки.

1. Из листа клетчатой бумаги размером  $29 \times 29$  клеточек вырезали 99 квадратов  $2 \times 2$  (режут по линиям). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
2. Доску  $123 \times 123$  разбили на прямоугольники  $1 \times 3$ . Докажите, что число горизонтальных прямоугольников делится на 3.
3. Можно ли разбить клетчатую доску  $12 \times 12$  на уголки из трёх клеток так, что каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекло одно и то же количество уголков?
4. Доска  $8 \times 8$  красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок.
5. Есть таблица  $15 \times 100$  (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.
6. В таблице  $10 \times 10$  расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке от 1 до 10 слева направо, во второй от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники  $1 \times 2$ , посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?
7. В клетках таблицы  $15 \times 15$  изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?