

Готовимся к региону. Графы.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A , B , C и D , что A выиграла у B , C и D ; B выиграла у C и D ; C выиграла у D .
2. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
3. В кружке учатся 17 человек, при этом любые двое либо друзья, либо соперники, либо не слышали друг о друге. Наведя справки, преподаватель выяснил, что в группе нет тройки учеников, в которой любые двое дружат между собой. Чуть позже он выяснил, что нет тройки учеников, в которой каждые двое соперничают друг с другом. Докажите, что в этой группе есть тройка людей, которые не слышали друг о друге.
4. В стране любые два города соединены дорогой. Президент хочет победить коррупцию. Для этого он хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы если машина с ворованными бюджетными деньгами выехала из какого-то города, то она в него не вернется. Сколькими способами он может это сделать?
5. Турист приехал на вокзал и отправился гулять по улицам города (каждая улица соединяет ровно два перекрестка). Докажите, что он в любой момент может вернуться на вокзал, проходя только по тем участкам улиц, по которым он уже проходил нечетное число раз.
6. В кружке 53 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.
7. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?