Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2001-2002, 11 класс, второй день

1. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

2. На плоскости даны $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют ещё не соединённую пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же очередной ход невозможен, а нулевой суммы не было, то выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — биссектрисы внешних углов этого четырёхугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C — в точке L, прямые l_C и l_D — в точке M, прямые l_D и l_A — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN касаются внешним образом.

4. На отрезке $[0, N]$ отмечены его концы и ещё 2 точки так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0, N]$, целые и взаимно просты в совокупности. Если нашлись две отмеченные точки A и B такие, что расстояние между ними кратно 3, то можно разделить отрезок AB на 3 равных части, отметить одну из точек деления и стереть одну из точек A, B. Верно ли, что за несколько таких дейсствий можно отметить любую наперед заданную целую точку отрезка $[0, N]$.