Геометрия. Разнобой

1. В треугольнике ABC (AB < AC) точка I — центр вписанной окружности. Пусть M — середина BC, а Q — середина дуги BAC. Докажите, что $\angle BMI = \angle AQI$.

2. В остроугольном треугольнике ABC провведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, делит отрезок KL пополам.

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

4. Дан треугольник ABC. В нём H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK также параллельны.

5. Строго внутри треугольника взята окружность ω. Каждая из окружностей ω_1, ω_2, ω_3 касается внешним образом окружности ω, в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно и двух сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

6. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести с помощью циркуля и линейки прямую, пересекающую AC в точке X, а BC в точке Y так, что $AX = XY = YB$.