Окружной этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2001-2002, 11 класс, первый день

1. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечетных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y — рациональные числа.

2. Высота четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

3. Набор чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяет условиям: $a_0 = 0$, $a_{k+1} \geqslant a_k + 1$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

4. Каждая клетка клетчатой плоскости раскрашена в один из n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n \times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов